Fonctions: dérivation

I- Dérivabilité en $x_0 \in \mathbb{R}$:

1) <u>Définition:</u> : Soit *f* une fonction définie sur un domaine *D* et $x_0 \in D$

On dit que la fonction *f* est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque *x* tend vers x_0 . Cette limite est alors appelé nombre dérivé de *f* en x_0 et notée $f'(x_0)$.

Remarques:

a) Pour pouvoir envisager cette limite, il faut que *f* soit définie au voisinage de x_0 : autrement dit , x_0 n'est pas un point isolé de *D*.

b) En posant $x = x_0 + h$, cette définition s'écrit aussi : le taux d'accroissement $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie lorsque *h* tend vers 0.

c) On note parfois $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$.

Exemples :

a) *f* est constante

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = \sin x$

Définition: on dit qu'une fonction *f* est dérivable sur un intervalle *I* si elle est dérivable en tout point de *I*. On peut alors définir la fonction dérivée de *f*, notée f' , qui à tout x de I associe $f'(x)$.

Théorème: si *f* est dérivable en x_0 , alors *f* est continue en x_0 .

Dem

Attention, la réciproque est fausse.

2) <u>Dérivée à droite, à gauche:</u>

Soit *f* une fonction définie sur un domaine *D* et $x_0 \in D$.

On dit que la fonction *f* est dérivable à droite en x_0 si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque *x* tend vers x_0 à droite . Cette limite est alors appelé nombre dérivé de *f* en x_0 à droite et notée $f_d'(x_0)$. Cela revient à dire que la restriction de *f* à $D \cap [x_0, +\infty[$ est dérivable.

On définit de manière analogue la dérivabilité à gauche.

Exemple : $f(x) = |x|$

Propriété: si *D* contient un intervalle ouvert contenant x_0 , alors *f* est dérivable en x_0 si et seulement si *f* est dérivable à droite et à gauche en x_0 ET $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$

3) Développement limité d'ordre 1:

Définition: soit *f* une fonction de D dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage de x_0 ;
on dit que *f* possède un développement limité d'ordre 1 (DL1) en x_0 si il existe deux réels *a* et *b* tels que
$f(x)=a+b(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.

On peut écrire de manière équivalente:
f possède un développement limité d'ordre 1 (DL1) en x_0 si il existe deux réels *c* et *d* tels que
$f(x)=c+dx+(x-x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$.
On a donc « approché » *f* par un polynôme de degré 1…

Propriété: soit *f* une fonction de *D* dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage de x_0
f est dérivable en x_0 si et seulement si *f* admet un DL1 en x_0 .

Dem:

Remarques:

a) Si on pose $x=x_0+h$, on a $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

b) Si une fonction *f*, non définie en x_0 , admet au voisinage de x_0 un DL1
$f(x)=a+b(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$, on peut prolonger f par continuité en x_0 par
$f(x_0)=a$, et la fonction ainsi prolongée sera dérivable en x_0 .

Exemples : au voisinage de 0, $\sin x=$ $\qquad$ $e^x=$
$\ln(1+x)=$ $\qquad$ $\sqrt{1+x}=$
$\dfrac{1}{1+x}=$ $\qquad$ $(1+x)^\alpha=$

Définition: si *f* est dérivable en x_0 , la fonction $\varphi(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ est appelée approximation affine de *f* en x_0 .

4) Interprétation géométrique, tangente:

Définition: Soit *f* une fonction continue en x_0 , *C* sa courbe, M_0 le point de *C* d'abscisse x_0 et M le point de *C* d'abscisse x; la droite Δ passant par M_0 est dite tangente à la courbe *C* si elle est la limite de la droite (M_0M) lorsque *M* tend vers M_0 .

Théorème: si la fonction *f* est dérivable en x_0 , alors sa courbe admet en M_0 une tangente non verticale, qui est la droite passant par M_0 et de pente $f'(x_0)$.
L'équation de cette tangente est $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Remarques:

a) on retrouve l'approximation affine de *f* en x_0 .

b) la position de la courbe par rapport à sa tangente se détermine en cherchant le signe de
$f(x)-\left[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right]$.

Exemple : $f(x)=x^2$

Théorème:si la fonction f définie sur D est continue en x_0 , et si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$) lorsque x tend vers x_0 , alors la courbe de f admet en M_0 une tangente verticale .
Exemple : $f(x)=\sqrt{x}$ en 0.

Remarque: la dérivabilité à droite correspond à une demi tangente à droite, et de même à gauche.

II - Calcul des dérivées:

1) Opérations:
Soient *f* et *g* deux fonction définies sur *D* et dérivables en $x_0 \in D$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$, λf et fg sont dérivables en x_0 ; si $f(x_0)\neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en x_0 , et si $g(x_0)\neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 , avec les formules bien connues:

Propriété : en conséquence, tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et toute fraction rationnelle est dérivable sur son domaine.

2) Composition:
Soient *f* et *g* deux fonctions telles que $g\circ f$ est définie au voisinage de x_0 ; si *f* est dérivable en x_0 et *g* est dérivable en $y_0=f(x_0)$, alors $g\circ f$ est dérivable en x_0 et $(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)\times g'(f(x_0))$.

Exemples: $\sqrt{f}$

$\ln(|f|)$

3) Dérivée de la fonction réciproque : PLEASE apprenez ce théorème…
Théorème: soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle *I*, elle définit donc une bijection de *I* sur l'intervalle $f(I)=J$. Si *f* est dérivable en x_0 ET SI $f'(x_0)\neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0=f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

En conséquence, si *f* est dérivable sur *I* et que sa dérivée ne s'annule pas sur *I*, alors f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$.

Regarder le dessin…

Dem:

Exemples:

4) Tableau des dérivées:

fonction f	**domaine de f**	**fonction f'**	**domaine de f'**

III- Théorème de Rolle et des accroissements finis:

1) Extremum d'une fonction dérivable:

Théorème: Soit I un intervalle, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$, qui n'est pas une extrémité de I.
Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques:

a) la conclusion peut être fausse si x_0 est une borne de l'intervalle: ex $f(x) = x$ sur $[0,1]$.

b) la réciproque est fausse : ex $f(x) = x^3$

Dem:

2) Théorème de Rolle:

Soient deux réels a et b avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ avec de plus $f(a) = f(b)$; alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Dem:

Interprétation graphique:

Remarque: en conséquence, si f s'annule n fois sur un intervalle I, alors sa dérivée s'annule (au moins) $n-1$ fois sur cet intervalle .
Cas des polynômes: si P est un polynôme de degré n (à coefficients réels) ayant n racines distinctes, alors son polynôme dérivé P' admet n-1 racines distinctes, qui sont comprises entre celles de P.

3) Formule des accroissements finis:
Théorème (des accroissements finis) :Soient deux réels a et b avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$; alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Dem:

Remarque: le théorème de Rolle est en fait un cas particulier de la formule des accroissements finis.

Interprétation graphique:

4) Inégalité des accroissements finis:
Théorème: Soient deux réels a et b avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$;
Si il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a,b[\quad m \leq f'(x) \leq M$, alors
$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Dem:

conséquence: si il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in]a,b[\quad |f'(x)| \leq K$, alors $|f(b) - f(a)| \leq K|b-a|$

Exemples :

5) Théorème de prolongement :
Soit I un intervalle et $a \in I$; f est une fonction continue sur I et dérivable sur $I - \{a\}$. Si la fonction f' admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$.
Dem

Remarques:
a) la fonction f' est alors continue en a.
b) la réciproque est fausse: par exemple la fonction $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est continue en 0, sa dérivée n'a pas de limite en 0 et elle est dérivable en 0…

IV- Dérivation et sens de variations:

1) Théorème: soit f une fonction dérivable sur un intervalle I; on a les équivalences:
f est croissante sur I $\Leftrightarrow f' \geq 0$
f est décroissante sur I $\Leftrightarrow f' \leq 0$
f est constante sur I $\Leftrightarrow f' = 0$

dem

2) Propriété: si $f' > 0$ sur I, alors *f* est strictement croissante sur *I*.
Une forme de réciproque: si $f' \geq 0$ sur *I* et ne s'annule qu'en des points isolés, alors *f* est strictement croissante sur *I*.

Démonstration:

3) Propriété: Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I, x_0 un point de I qui n'est pas une extrémité de I, si f' s'annule en x_0 et change de signe, alors *f* a en x_0 un extremum local.

V- Dérivées successives:

Soit $n \in \mathbb{N}$

1) Définition: soit *f* une fonction définie et dérivable sur *D*; si la fonction f' est elle-même dérivable sur *D*, on dit que *f* est deux fois dérivable sur D, et on note f'' la dérivée seconde de f c'est à dire la fonction dérivée de f'. Plus généralement, on définit la dérivée n-ème de *f* (si elle existe), comme la dérivée de sa dérivée (*n* - 1)-ème. On la note $f^{(n)}$. Par convention , $f^{(0)} = f$.

On dit que la fonction *f* est de classe C^n sur *D* si elle est *n* fois dérivable sur *D* et si $f^{(n)}$ est continue sur *D*.
On dit que la fonction *f* est de classe C^∞ sur *D* si elle de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La plupart des fonctions que vous connaissez sont de classe C^∞ sur leur domaine…

2) Opérations:
a) Si f et g sont de classe C^n sur *D,et* $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ et λf sont de classe C^n sur *D avec*
$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

b) Formule de Leibniz:

Si f et g sont de classe C^n sur *D,* alors fg de classe C^n sur *D* avec *:* $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

Exemples:

c) Propriété : Soit *f* une fonction de *I* dans $\mathbb{R}$ et *g* une fonction de *J* dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.
Si *f* est de classe C^n sur *I* et g est de classe C^n sur *J*, alors $g \circ f$ est de classe C^n sur *I*.

Démonstration: par récurrence sur *n*.

e) Propriété: Si *f* est de classe C^n sur *I* et *f* ne s'annule pas sur *I* , alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe C^n sur *I*.

On en déduit la propriété pour $\dfrac{f}{g}$.